

Aufgaben zum Aufstellen von Funktionen aus gegebenen Bedingungen

- 1 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p(x)$. Diese Parabel schneidet die x-Achse im Punkt $N(6/0)$. Ihr Scheitelpunkt $S(3/y_s)$ liegt auf dem Graphen der Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2.$$

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (Abitur 1996 All) ☐

- 2 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p(x)$. Diese Parabel schneidet

den Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$ an der Stelle $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ und

besitzt an der Stelle $x_3 = 3$ eine zur Geraden mit der Gleichung $y = -2x$ parallele Tangente.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (Abitur 1997 All) ☒

- 3 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p(x)$.

Diese Parabel verläuft symmetrisch zur y-Achse, schneidet die x-Achse im Punkt $N(3/0)$ und die Ordinate ihres Scheitelpunktes hat den Wert $y_s = -3$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (Abi 1998 A II) ☒

- 4 Der Graph G_g der reellen Funktion $g(x)$ mit $g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + ax^2 + bx + c)$ schneidet

die x-Achse an der Stelle $x_0 = 2$ und hat den relativen Tiefpunkt $T(4/-5)$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $g(x)$. (Abi 2000 A I) ☐

- 5 Der Graph einer ganzrationalen Funktion k dritten Grades verläuft durch die Punkte $A(0/3)$, $B(1/22)$, $C(2/29)$ und $D(3/30)$.

Ermitteln Sie den Funktionsterm $k(x)$. (Abi 2000 A II) ☒

- 6 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p(x)$.

Die Funktion p hat bei $x_0 = -4$ eine Nullstelle. Ihr Graph G_p schneidet den Graphen

der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 4$ auf der y-Achse und hat in diesem Schnittpunkt

die Steigung $m = \frac{1}{3}$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (Abi 2001 A I) ☐

- 7 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p(x)$.

Diese Parabel geht durch den Punkt $P(-3/9)$ und berührt den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{27}x^3 - 2x + 5 \text{ im Punkt } Q(3/y).$$

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (Abi 2002 A I) ☒

8 Die reelle Funktion $f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2$ ist die zweite Ableitung der Funktion f . Der Graph

der Funktion f wird mit G_f bezeichnet. Gegeben ist außerdem die reelle Funktion

$$p(x) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{25}{6}. \text{ Der Graph dieser Funktion ist die Parabel } G_p.$$

Der Graph G_f schneidet die Parabel G_p im Punkt $A(2; y_A)$. Die Steigung der Tangente an G_f im Punkt A wird m_f genannt, die Steigung der Tangente G_p im selben Punkt m_p .

Es gilt nun: $m_f \cdot m_p = -1$.

Berechnen Sie den Funktionsterm der Funktion f . (Abitur 2003 AI) 

9.0 Der Graph einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades hat den Wendepunkt $W(0/5)$ und verläuft durch den Punkt $P(1/8)$. Die Wendetangente enthält den Punkt $Q(-1,25/0)$. (Abitur 2006 AI)

9.1 Zeigen Sie, dass die Wendetangente die Steigung $m_t = 4$ hat. 

9.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm $h(x)$. 

10 Eine ganzrationale Funktion r dritten Grades geht durch die Punkte $B(-5/4)$ und $C(0/0)$.

Außerdem liegt im Punkt $T(-1/-\frac{28}{25})$ ein Tiefpunkt vor.

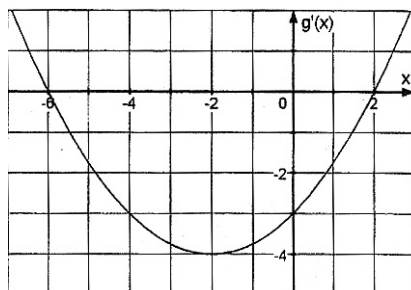
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion $r(x)$. (Abitur 2007 AI) 

11 Gegeben ist die reelle Funktion $h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c$ mit reellen Konstanten a , b und

c . Der Graph G_h dieser Funktion schneidet den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 4)^2$ auf der y -Achse und besitzt bei $x_0 = -2$ einen Terrassenpunkt.

Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion $h(x)$. (Abitur 2007 AII) 

12.0 Die untere Abbildung zeigt den Graphen der 1. Ableitungsfunktion g' der Funktion $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.



12.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm $g(x)$ der Funktion g . 

12.2 Der Graph von g besitzt offensichtlich die Nullstelle $x = 0$. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es für $x > 0$ eine weitere Nullstelle von g geben muss. 

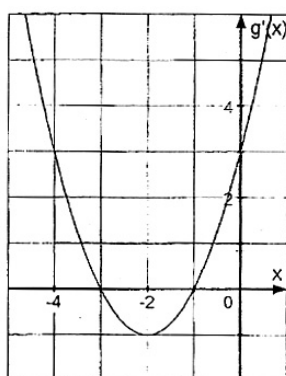
12.3 Begründen Sie ohne Rechnung mit Hilfe obiger Zeichnung, an welcher Stelle der Graph von g eine Wendestelle hat. ○

13 Von der ganzrationalen Funktion f dritten Grades ist die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \text{ gegeben.}$$

Der Graph G_f schneidet die x -Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y -Achse im Punkt $P(0/\frac{5}{4})$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. (Abitur 2009 AI) ☹

14.0 Untenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an. (Abitur 2009 AII)



14.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt. ○

14.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g , deren Wendepunkt auf der x -Achse liegt. ☹

15.0 Forscher untersuchten jeweils fünf Tage lang das Wachstum von Bakteriensorten. Hierbei ergab sich, dass die von den Bakterien bedeckte Fläche annähernd durch die reelle Funktion $A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + at^2 + bt + c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $t \in [0; 5]$ beschrieben werden kann, wobei $A(t)$ die bedeckte Fläche (in mm^2) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet. Bei einer bestimmten Sorte war zu Beginn des Untersuchungszeitraums ($t = 0$) die von den Bakterien bedeckte Fläche 1 mm^2 groß. Nach zwei Tagen hat der Bestand sein Maximum mit 5 mm^2 erreicht. (Abitur 2010 AI)

15.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a , b und c und damit $A(t)$. ☹

$$(\text{Ergebnis: } A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8))$$

15.2 Berechnen Sie die von den Bakterien nach drei Stunden bedeckte Fläche gerundet auf eine Nachkommastelle genau. ☐

15.3 Ermitteln Sie die Wendestelle t_w der Funktion A und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. ☒

15.4 Zeichnen Sie für $t \in [0;5]$ den Graphen der Funktion A mit Hilfe vorliegender Ergebnisse. ☐

16.0 Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades besitzt den Extrempunkt $E(4/0)$, schneidet die y-Achse im Punkt $(0/3)$ und hat an der Stelle $x_w = \frac{7}{3}$ einen Wendepunkt. (Abitur 2010 All)

16.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$. ☒

(Mögliches Ergebnis: $f(x) = \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$)

16.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheiten. ☒

16.3 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f auf zwei Nachkommastellen genau. ☐

16.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-1,5 \leq x \leq 5$ mithilfe vorliegender und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein Koordinatensystem. ☐
Maßstab auf beiden Achsen: 1 LE = 1 cm

17 Gegeben ist eine quadratische Funktion p. Der Graph von p besitzt an der Stelle $x = -\frac{9}{4}$ den Scheitelpunkt und berührt den Graphen der Funktion f ($f(x) = \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20)$) an der Stelle $x = -1$.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$. (Abitur 2011 AI) ☒

18 Gegeben ist die reelle Funktion H durch $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$. H ist eine Stammfunktion der ganzrationalen Funktion h.

Bestimmen Sie den Funktionsterm $H(x)$, wenn der Graph der Funktion h

punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und $W\left(-3/\frac{3}{4}\right)$ ein Wendepunkt des

Graphen G_H ist. (Abitur 2011 All) ☒

19.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ berührt die x -Achse bei $x = -1$ und schneidet die y -Achse bei $y = 2$. Die Tangente an den Graphen G_f für $x = 2$ hat die Steigung $m = -9$. (Abitur 2013 All)

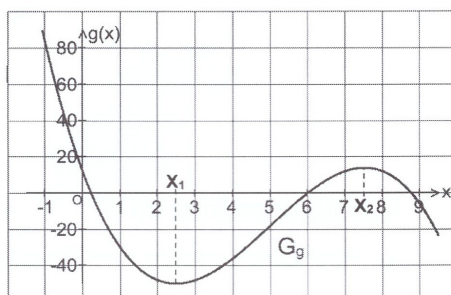
19.1 Begründen Sie, dass die zugehörige Funktion nicht 2. Grades sein kann. 

19.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der ganzrationalen Funktion f dritten Grades.
(Ergebnis: $f(x) = -x^3 + 3x + 2$) 

19.3 Weisen Sie durch entsprechende Berechnungen nach, dass die Gerade G_g mit $g(x) = 4$ Tangente an den Graphen G_f im Hochpunkt von G_f ist und ermitteln Sie die Koordinaten des weiteren gemeinsamen Punktes von G_g und G_f . 

19.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Gerade G_g im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ mithilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. 

20.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $D_g = \mathbb{R}$, deren Graph G_g in untenstehender Abbildung dargestellt ist. Vom Graphen sind folgende Eigenschaften bekannt: G_g hat bei der Nullstelle $x = 6$ eine Tangente G_t mit $t: y = 16x - 96$ mit $x \in \mathbb{R}$ und besitzt den Wendepunkt $W(5/-18)$. (Abitur 2017 AI)



20.1 Skizzieren Sie den Graphen $G_{g'}$ der 1. Ableitungsfunktion von g in ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die maximalen Monotonieintervalle der 1. Ableitungsfunktion g' an. 

20.2.0 Zur Bestimmung des Funktionsterms $g(x)$ ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

(I) $216a + 36b + 6c + d = 0$

(II) $125a + 25b + 5c + d = -18$

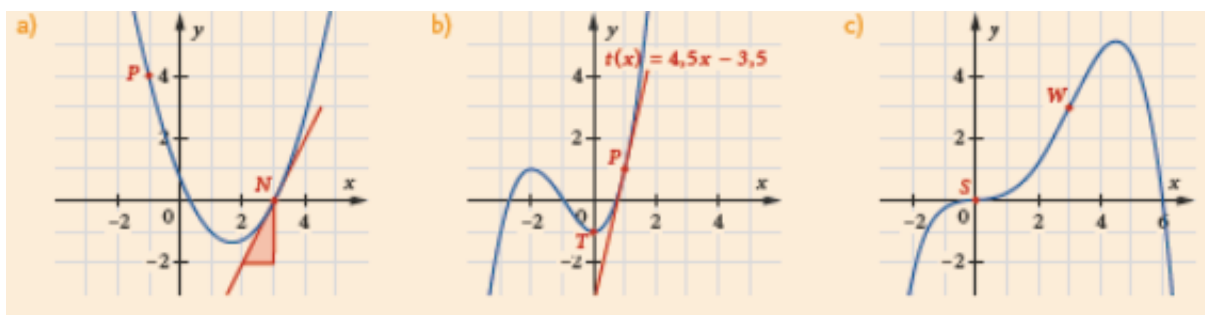
(III) $108a + 12b + c = 16$

(IV) $30a + 2b = 0$

20.2.1 Geben Sie nachvollziehbar an, welche Ansätze zu diesen Gleichungen führen. 

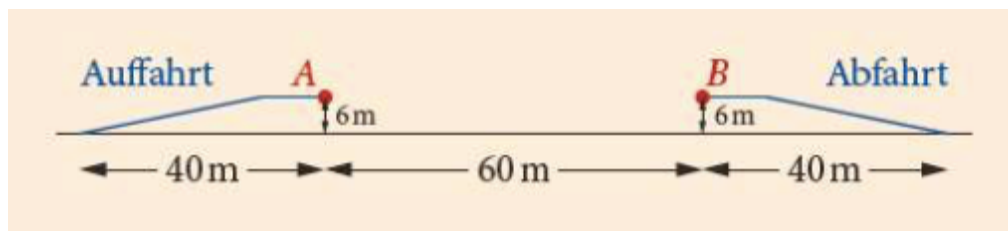
20.2.2 Bestimmen Sie $g(x)$ mithilfe der Gleichungen aus 20.2.0. 

- 21 Gesucht sind die Funktionsgleichungen zu den abgebildeten Graphen. Ermitteln Sie die Gleichung ausschließlich mithilfe der gekennzeichneten Merkmale des Graphen (ohne Hilfsmittel). ☒

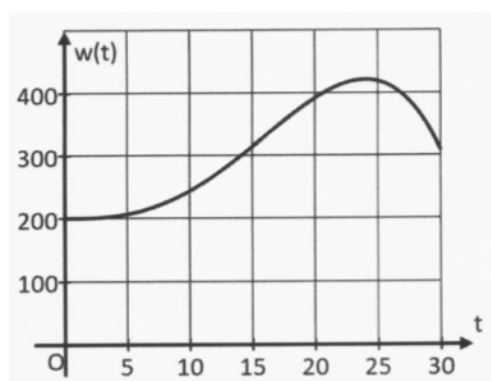


- 22.0 Die Ausbreitung einer Infektion lässt sich anhand der Anzahl der neu erkrankten Personen in Abhängigkeit der Zeit dokumentieren.
- 22.1 In einem Wohngebiet einer Stadt wurden am ersten Tag 500 Krankheitsfälle gemeldet. Noch am Tag zuvor hatte es keine Meldung dieser Erkrankung gegeben. Der größte Anstieg an Neuerkrankungen war am zweiten Tag zu verzeichnen. Nach fünf Tagen wurde die größte Zahl an Neuerkrankungen registriert. Danach ging die Anzahl der Erkrankungen deutlich zurück. Skizzieren Sie den Verlauf der Ausbreitung. ☐
- 22.2 Modellieren Sie die Verbreitung des Virus durch eine geeignete ganzrationale Funktion dritten Grades. ☒
- 22.3 Zeichnen Sie den Graphen der in 22.2 ermittelten Funktion. Prüfen Sie sowohl anhand der Zeichnung als auch mithilfe der aufgestellten Gleichung, ob die Funktion tatsächlich die genannten Fakten darstellt. ☐
- 22.4 Berechnen Sie die Höchstzahl der an einem Tag gemeldeten Neuerkrankungen. ☒
- 22.5 Berechnen Sie, um wie viele Neuerkrankungen die Zahl der Infizierten maximal an einem Tag zunahm. ☒
- 22.6 Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen nicht mehr mit Neuerkrankungen zu rechnen war. ☐
- 23 Die Gewinne eines Unternehmens lassen sich durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades darstellen. Die Gewinnschwelle liegt bei 3 ME, die Gewinngrenze wird bei 12 ME erreicht. Der Gewinn ist maximal bei einer Ausbringung von 8 ME und beträgt 400 GE. Ermitteln Sie die Gewinnfunktion. ☒

- 24.0 In einem Freizeitpark soll eine Achterbahn gebaut werden. Geplant sind drei Abschnitte: die Auffahrt, die eigentliche Achterbahn und die Abfahrt. Die Länge der gesamten Strecke beträgt 140 m (am Boden gemessen).



- 24.1 Skizzieren Sie mithilfe der Abbildung einen möglichen Verlauf für den mittleren Abschnitt. 
- 24.2 Stellen Sie die Bedingungen für eine ganzrationale Funktion auf, deren Graph den mittleren Abschnitt der Bahn darstellt. Beachten Sie dabei, dass die Achterbahn höchstens 35 m hoch sein soll und jeweils waagrecht in die Auffahrt und Abfahrt münden soll. Außerdem soll der mittlere Abschnitt zunächst einen Tiefpunkt am Boden haben. 
- 25.0 Das Landesamt für Umwelt ist unter anderem dafür zuständig, vor Überflutungen durch Flüsse zu warnen und lässt dazu täglich kontinuierlich die Wasserstände diverser Flüsse überprüfen. Der Wasserstand eines bestimmten Flusses im März des Jahres 2010 kann vereinfacht durch die Funktion w mit der Funktionsgleichung $w(t) = at^4 + bt^3 + c$ mit geeigneten Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und der Definitionsmenge $D_w = [0; 30]$ beschrieben werden.
- Dabei bedeutet die Variable t die Zeit in Tagen ab Monatsbeginn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$. Der Funktionswert $w(t)$ gibt den Wasserstand des Flusses in cm an. Zu Monatsbeginn lag der Wasserstand bei 200 cm und am Monatsende bei 308 cm. Der höchste Wasserstand wurde am 25. März – also zum Zeitpunkt $t_{\max} = 24$ – gemessen.
- Der abgebildete Graph zeigt den Wasserstand $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t . Auf das Mitführen von Einheiten während der Rechnungen kann verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse – falls nicht anders gefordert – sinnvoll.
- (Abitur 2019 Teil 2 All)



25.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c und damit die zugehörige Funktionsgleichung von w. 

(mögliches Ergebnis: $w(t) = -\frac{1}{500}(t^4 - 32t^3 - 100000)$)

25.2 Berechnen Sie den höchsten Pegel im Beobachtungszeitraum zentimetergenau. 

25.3 Ermitteln Sie rechnerisch das Datum im Beobachtungszeitraum, an dem die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten war. 

26.0 Für eine ganzrationale Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen:

I. $f(0) = 0$ II. $f'(0) = 0$
III. $f(-3) = -3$ IV. $f'(-3) = -1$

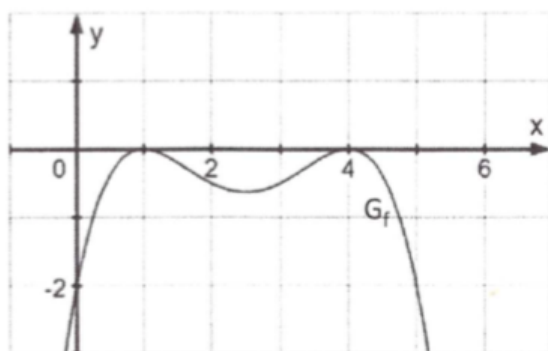
Der zugehörige Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

(Abitur 2019 Teil 2 AI)

26.1 Beschreiben Sie in Worten, welche Eigenschaften der Graph von f aufgrund obiger Gleichungen hat. 

26.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. 

27.0 Nebstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f der ganzrationalen Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Mit geeigneten Werten $a, b, c \in \mathbb{R}$ lässt sich der Funktionsterm $f(x)$ in der Form $f(x) = a \cdot (x+b)^2 \cdot (x+c)^2$ darstellen.
(Abitur 2020 Nachtermin Teil 2)



27.1 Entnehmen Sie der Abbildung aus 27.0 geeignete Punkte und bestimmen Sie damit rechnerisch den Term $f(x)$. Zeigen Sie, dass sich $f(x)$ auch in der Form

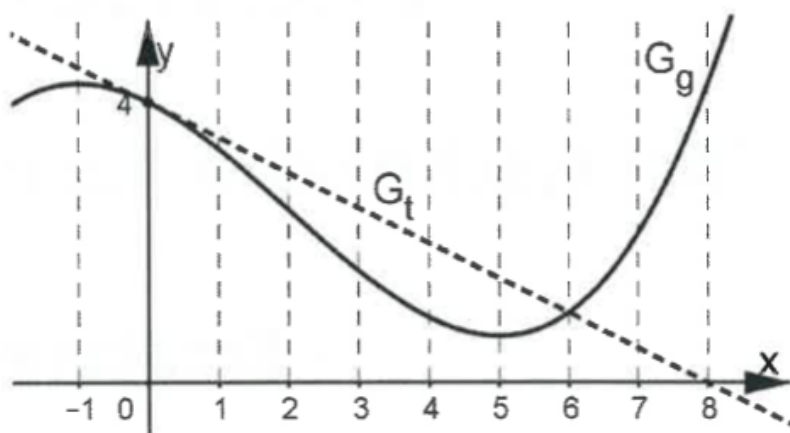
$f(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16)$ darstellen lässt. 

27.2 Berechnen Sie die Stellen, an denen der Graph G_f im Bereich $1 \leq x \leq 4$ das größte Gefälle bzw. die größte Steigung besitzt. ☹

28 Der Graph G_f einer auf $D_f = \mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vom Grad drei verläuft durch den Punkt $P(-1|0,5)$ und besitzt im Schnittpunkt mit der y -Achse einen Wendepunkt. Für die Wendetangente G_t gilt $t: y = 2x + 1$ mit der Definitionsmenge $D_t = \mathbb{R}$.
Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf. (Abitur 2021 AI) ☹

29 Der Graph einer ganzrationalen Funktion k vierten Grades mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x = 2$ einen relativen Extrempunkt und einen Terrassenpunkt auf der y -Achse. An der Stelle $x = 1$ hat die Tangente an den Graphen von k die Steigung $m = 1$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $k'(x)$ der Ableitungsfunktion von k . (ohne Hilfsmittel) ☹

30 Die Funktion g ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ein Ausschnitt des Graphen von g ist in der untenstehenden Abbildung zu sehen. Die Gerade G_t berührt den Graphen von g dort, wo er die y -Achse schneidet. Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm von g (Hinweis: der Abbildung dürfen geeignete ganzzahlige Werte entnommen werden). ☹



31 Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet und besitzt folgende Eigenschaften:

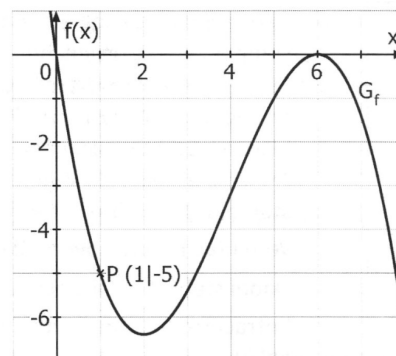
G_f hat jeweils eine waagrechte Tangente für $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{4}{3}$.

G_f schneidet die y -Achse bei 3.

G_f verläuft durch den Punkt $Q(1|2)$.

Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm $f(x)$. ☹

- 32 Der Graph der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ schneidet in einem kartesischen Koordinatensystem die y -Achse beim Wert $y = 2$ und verläuft durch den Extrempunkt $E(2|1,2)$. Außerdem ist bekannt, dass der Funktionsterm durch $f(x) = ax^3 + bx^2 - 0,9x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann. (Abitur 2023 All)
Bestimmen Sie im Funktionsterm von f die Werte der Parameter a , b und c . 
- 33 Der Graph G_f der Funktion f mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt im Ursprung einen Terrassenpunkt und den absoluten Tiefpunkt bei $x = 3$. Sonst existieren keine weiteren Punkte mit waagrechter Tangente. Außerdem ist bekannt, dass die Funktionsgleichung die Form $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ hat.
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b , c und d und damit den Funktionsterm $f(x)$. (Abitur 2026 AI) 
- 34 Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Die ganzzahligen Nullstellen können der Abbildung entnommen werden.
Bestimmen Sie den Term der Funktion f in vollständig faktorisierte Form und zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Funktionsgleichung von f auch in der Form darstellen lässt: $f(x) = -0,2x^3 + 2,4x^2 - 7,2x$ 
(Abitur 2026 All)



Lösungen

1.

Allgemeine Parabelgleichung: $p(x)=ax^2+bx+c$

$$(I) \quad N(6/0) \in G_p \Rightarrow 0 = a \cdot 6^2 + 6b + c \Rightarrow 36a + 6b + c = 0$$

$$(II) \quad S(3/y_s) \in G_p$$

$$y_s = f(3) = -\frac{1}{9} \cdot 3^3 + \frac{2}{3} \cdot 3^2 = 3 \Rightarrow S(3/3)$$

$$\Rightarrow 3 = a \cdot 3^2 + 3b + c \Rightarrow 9a + 3b + c = 3$$

$$(III) \quad p'(3) = 0$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$\Rightarrow 2a \cdot 3 + b = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$$

$$(III) \Rightarrow b = -6a$$

$$b \text{ in (II): } 9a + 3(-6a) + c = 3 \Rightarrow 9a - 18a + c = 3 \Rightarrow c = 3 + 9a$$

$$b \text{ und } c \text{ in (I): } 36a + 6(-6a) + 3 + 9a = 0 \Rightarrow 9a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow b = -6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \quad c = 3 + 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$$

2.

Allgemeine Parabelgleichung: $p(x)=ax^2+bx+c$

$$(I) \quad P_1(1/y) \in G_p$$

$$y = f(1) = \frac{1}{3}(1^3 - 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 2) = \frac{1}{3}(1 - 3 - 9 + 2) = -3 \Rightarrow P_1(1/-3)$$

$$-3 = a \cdot 1^2 + b + c \Rightarrow a + b + c = -3$$

$$(II) \quad P_2(4/y) \in G_p$$

$$y = f(4) = \frac{1}{3}(4^3 - 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 2) = \frac{1}{3}(64 - 48 - 36 + 2) = -6 \Rightarrow P_2(4/-6)$$

$$-6 = a \cdot 4^2 + 4b + c \Rightarrow 16a + 4b + c = -6$$

$$(III) \quad p'(3) = -2$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$2a \cdot 3 + b = -2 \Rightarrow 6a + b = -2$$

$$(III) \Rightarrow b = -2 - 6a$$

$$b \text{ in (I): } a + (-2 - 6a) + c = -3 \Rightarrow a - 2 - 6a + c = -3 \Rightarrow c = -1 + 5a$$

$$b \text{ und } c \text{ in (II): } 16a + 4(-2 - 6a) + (-1 + 5a) = -6 \Rightarrow -3a - 9 = -6 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow b = -2 - 6 \cdot (-1) = 4 \quad c = -1 + 5 \cdot (-1) = -6$$

$$\Rightarrow p(x) = -x^2 + 4x - 6$$

3. Allgemeine Parabelgleichung: $p(x) = ax^2 + bx + c$;

Bedingungen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad p(-x) &= p(x) \Rightarrow a(-x^2) + b(-x) + c = ax^2 + bx + c \\ &\Rightarrow ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c \\ &\Rightarrow -bx = bx \quad 2bx = 0 \quad b = 0 \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \quad p(3) = 0 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$$

$$\text{(III)} \quad p(0) = -3 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3 \Rightarrow c = -3$$

$$b = 0, c = -3 \text{ in (II): } 9a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$$

4.

$$g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + ax^2 + bx + c)$$

$$g'(x) = \frac{1}{4}(-3x^2 + 2ax + b)$$

$$\text{(I)} \quad g(2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(-8 + 4a + 2b + c) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 8$$

$$\text{(II)} \quad g(4) = -5 \Rightarrow \frac{1}{4}(-64 + 16a + 4b + c) = -5 \Rightarrow 16a + 4b + c = 44$$

$$\text{(III)} \quad g'(4) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(-48 + 8a + b) = 0 \Rightarrow 8a + b = 48$$

$$\text{(III)} \Rightarrow b = 48 - 8a$$

$$b \text{ in (I)} \Rightarrow 4a + 96 - 16a + c = 8 \Rightarrow c = -88 + 12a$$

$$b \text{ und } c \text{ in (II)} \Rightarrow 16a + 4(48 - 8a) - 88 + 12a = 44$$

$$\Rightarrow 16a + 192 - 32a - 88 + 12a = 44$$

$$\Rightarrow 4a = 60 \Rightarrow a = 15$$

$$\Rightarrow b = 48 - 8 \cdot 15 = 48 - 120 = -72$$

$$\Rightarrow c = -88 + 12 \cdot 15 = -88 + 180 = 92$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + 15x^2 - 72x + 92)$$

5. Allgemeine Gleichung: $k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

Bedingungen:

$$(I) \quad k(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3 \Rightarrow d = 3$$

$$(II) \quad k(1) = 22 \Rightarrow a + b + c + d = 22$$

$$(III) \quad k(2) = 29 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 29$$

$$(IV) \quad k(3) = 30 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 30$$

$$(II) \Rightarrow a = 19 - b - c$$

$$a \text{ in (III)} \Rightarrow 8(19 - b - c) + 4b + 2c + 3 = 29$$

$$\Rightarrow 152 - 8b - 8c + 4b + 2c + 3 = 29$$

$$\Rightarrow 155 - 4b - 6c = 29$$

$$\Rightarrow 4b = 126 - 6c \Rightarrow b = 31,5 - 1,5c$$

$$\Rightarrow a = 19 - (31,5 - 1,5c) - c \Rightarrow a = -12,5 + 0,5c$$

$$a \text{ und } b \text{ in (IV)} \Rightarrow 27(-12,5 + 0,5c) + 9(31,5 - 1,5c) + 3c + 3 = 30$$

$$\Rightarrow -337,5 + 13,5c + 283,5 - 13,5c + 3c + 3 = 30$$

$$\Rightarrow -51 + 3c = 30 \Rightarrow 3c = 81 \Rightarrow c = 27$$

$$\Rightarrow b = 31,5 - 1,5 \cdot 27 = 31,5 - 40,5 = -9$$

$$\Rightarrow a = -12,5 + 0,5 \cdot 27 = -12,5 + 13,5 = 1$$

$$\Rightarrow k(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3$$

6.

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$(I) \quad p(-4) = 0 \Rightarrow 16a - 4b + c = 0$$

$$(II) \quad p(0) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$(III) \quad p'(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$c \text{ und } b \text{ in (I)} \Rightarrow 16a - \frac{4}{3} + 4 = 0 \Rightarrow 16a = -\frac{8}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$$

7.

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$(I) \quad p(-3) = 9 \Rightarrow 9a - 3b + c = 9$$

$$(II) \quad p(3) = 1 \Rightarrow 9a + 3b + c = 1$$

$$(III) \quad p'(3) = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$$

$$(III) \Rightarrow b = -6a$$

$$b \text{ in (I)} \Rightarrow 9a + 18a + c = 9 \Rightarrow c = 9 - 27a$$

$$b \text{ und } c \text{ in (II)} \Rightarrow 9a + 3(-6a) + 9 - 27a = 1$$

$$\Rightarrow -36a = -8 \Rightarrow a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow b = -6 \cdot \frac{2}{9} = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow c = 9 - 27 \cdot \frac{2}{9} = 9 - 6 = 3$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3$$

8.

$$f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x + c \quad f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + cx + d$$

$$(I) \quad p(2) = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} - 4 + 2c + d = \frac{9}{2} \Rightarrow 2c + d = 8$$

$$(II) \quad p'(x) = \frac{1}{6}x \Rightarrow p'(2) = \frac{1}{3} = m_p$$

$$m_f \cdot m_p = -1 \Rightarrow m_f = -3$$

$$f'(2) = -3 \Rightarrow 1 - 4 + c = -3 \Rightarrow c = 0$$

$$c = 0 \text{ in (I)} \Rightarrow 2 \cdot 0 + d = 8 \Rightarrow d = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8$$

9.1 Der Wendepunkt $W(0/5)$ und der Punkt $Q(-1,25/0)$ liegen auf der Wendetangente

$$\Rightarrow m_t = \frac{5-0}{0-(-1,25)} = 4$$

9.2

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad h''(x) = 6ax + 2b$$

$$(I) \quad h(0) = 5 \Rightarrow d = 5$$

$$(II) \quad h'(0) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$(III) \quad h''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$(IV) \quad h(1) = 8 \Rightarrow a + b + c + d = 8$$

$$\Rightarrow a + 0 + 4 + 5 = 8 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow h(x) = -x^3 + 4x + 5$$

10)

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(I) \quad r(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$(II) \quad r(-5) = 4 \Rightarrow -125a + 25b - 5c + d = 4$$

$$(III) \quad r(-1) = -\frac{28}{25} \Rightarrow -a + b - c + d = -\frac{28}{25}$$

$$(IV) \quad r'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$\Rightarrow r(x) = \frac{4}{25}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{12}{5}x$$

11)

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c \quad h'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3 \quad h''(x) = 6ax + 2b$$

$$(I) \quad h(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$(II) \quad h'(-2) = 0 \Rightarrow 12a - 4b + 3 = 0$$

$$(III) \quad h''(-2) = 0 \Rightarrow -12a + 2b = 0$$

$$(II) + (III) \quad -2b + 3 = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\text{bin(III)} \quad -12a + 2 \cdot \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 12a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2$$

12.1

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(I) \quad g'(0) = -3 \Rightarrow c = -3$$

$$(II) \quad g'(-6) = 0 \Rightarrow 108a - 12b + c = 0$$

$$(III) \quad g'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{12} \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

12.2

G_g ist streng monoton fallend in $]0;2]$ und G_g ist streng monoton steigend in $[2;\infty[$

$\Rightarrow$ Minimum bei $x=2$

Es gilt, dass $x=0$ Nullstelle ist und danach G_g fällt $\Rightarrow$ TP unterhalb der x-Achse.

Da $g(x)$ eine Funktion 3. Grades mit positivem Koeffizienten vor x^3 ist, gilt also

für $x \rightarrow \infty \Rightarrow g(x) \rightarrow \infty$

$\Rightarrow G_g$ muss die x-Achse noch einmal schneiden, also eine weitere Nullstelle für $x > 0$

12.3

x_w ist Wendestelle von g , wenn x_w eine Extremstelle von $g'(x)$ ist

$\Rightarrow x=-2$ (Scheitelpunkt)

13.

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + a \quad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + ax + b$$

$$P(0/\frac{5}{4}) \Rightarrow b = \frac{5}{4}$$

$$Q(-1/0) \Rightarrow \frac{1}{4}(-1)^3 - \frac{9}{4}(-1)^2 + a(-1) + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$$

14.1

Extrema: $g'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = -1$

Monotonieverhalten:

G_g sms in $]-\infty;-3]$ sowie in $[-1;\infty[$

G_g smf in $[-3;-1]$

$\Rightarrow x_1 = -3$ ist Hochpunkt und $x_2 = -1$ ist Tiefpunkt

Bei $x_3 = -2$ hat g' eine Minimalstelle $\Rightarrow x_3 = -2$ ist Wendestelle von g

14.2

$$g'(x) = ax^2 + bx + c \quad S(-2/-1) \quad P(-1/0)$$

$$\Rightarrow g'(x) = a(x+2)^2 - 1$$

$$P(-1/0) \text{ einsetzen: } 0 = a((-1)+2)^2 - 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 4x + 3$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + d \quad g(-2) = 0 \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$$

15.1

$$A(t) = \frac{1}{8}(t^3 + at^2 + bt + c)$$

$$(I) \quad A(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{8} \cdot c = 1 \Rightarrow c = 8$$

$$(II) \quad A(2) = 5 \Rightarrow \frac{1}{8}(8 + 4a + 2b + c) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 32$$

$$(III) \quad \dot{A}(2) = 0$$

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{8}(3t^2 + 2at + b) \Rightarrow \frac{1}{8}(12 + 4a + b) = 0 \Rightarrow 4a + b = -12$$

$$\Rightarrow b = 36 \quad a = -12$$

$$\Rightarrow A(t) = \frac{1}{8}(t^3 - 12t^2 + 36t + 8)$$

15.2

$$A(0,125) = \frac{1}{8}(0,125^3 - 12 \cdot 0,125^2 + 36 \cdot 0,125 + 8) \approx 1,5$$

$$3 \text{ Stunden} \hat{=} 0,125 \text{ Tage}$$

15.3

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{8}(3t^2 - 24t + 36) \Rightarrow \ddot{A}(t) = \frac{1}{8}(6t - 24)$$

$$\ddot{A}(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{8}(6t - 24) = 0 \Rightarrow 6t - 24 = 0 \Rightarrow t = 4$$

Nachweis Wendepunkt:

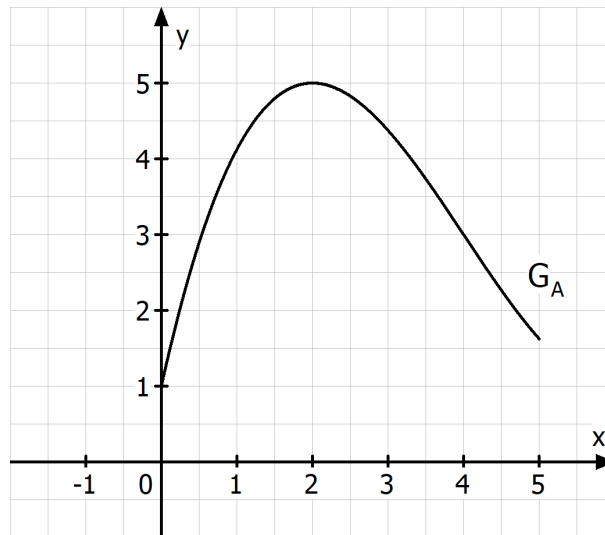
$$\ddot{\ddot{A}}(t) = \frac{1}{8} \cdot 6 \Rightarrow \ddot{\ddot{A}}(4) = \frac{1}{8} \cdot 6 \neq 0 \Rightarrow t = 4 \text{ Wendestelle}$$

$$\dot{A}(4) = \frac{1}{8}(48 - 96 + 36) = -1,5 < 0$$

$\Rightarrow$ zum Zeitpunkt $t = 4$ (Tage) ist die momentane Abnahme der bedeckten Fläche am größten

15.4 Maximum (2/5) Wendepunkt (4/3)

t	0	1	2	3	4	5
A(t)	1	4,125	5	4,375	3	1,625



16.1

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(I) \quad f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$$

$$(II) \quad f(4) = 0 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 0$$

$$(III) \quad f'(4) = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow 48a + 8b + c = 0$$

$$(IV) \quad f''\left(\frac{7}{3}\right) = 0$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 14a + 2b = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{16} \quad b = -\frac{21}{16} \quad c = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{21}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = \frac{3}{16}(x^3 - 7x^2 + 8x + 16)$$

16.2

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$x_1 = 4 \text{ (siehe Teilaufgabe a)}$$

$$(x^3 - 7x^2 + 8x + 16) : (x - 4) = x^2 - 3x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \quad x_3 = -1$$

$$\Rightarrow f \text{ hat zwei Nullstellen bei } x = 4 \text{ (doppelt) und bei } x = -1 \text{ (einfach)}$$

16.3

$$f'(x) = \frac{3}{16}(3x^2 - 14x + 8)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{6} = \frac{14 \pm 10}{6}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

Skizze von f' :

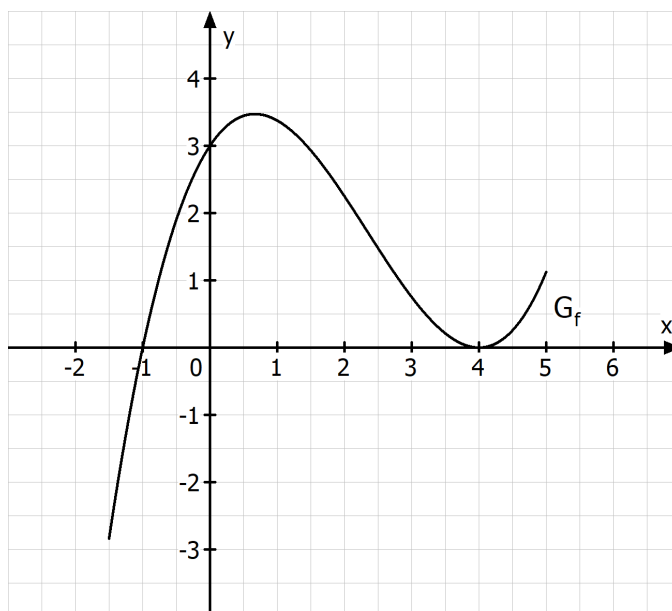
$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ HP} \Rightarrow \text{HP}\left(\frac{2}{3} / 3 \frac{17}{36}\right)$$

$$x = 4 \text{ TP} \Rightarrow \text{TP}(4/0)$$

16.4 Nullstellen: $x = -1$; $x = 4$

Extrema: $\text{HP}\left(\frac{2}{3} / 3 \frac{17}{36}\right)$; $\text{TP}(4/0)$

x	-1,5	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-2,84	0	3	3,38	2,25	0,75	0	1,13



17.

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad p'(x) = 2ax + b$$

$$(I) \quad p'\left(-\frac{9}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{2}a + b = 0$$

$$(II) \quad p(-1) = f(-1)$$

$$\Rightarrow a - b + c = 4$$

$$(III) \quad p'(-1) = f'(-1) \quad f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 + 2x - 16)$$

$$\Rightarrow -2a + b = -\frac{5}{3}$$

$$(I) \Rightarrow b = \frac{9}{2}a$$

$$b = \frac{9}{2}a \text{ in (III): } -2a + \frac{9}{2}a = -\frac{5}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow b = \frac{9}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -3$$

$$(II) \Rightarrow -\frac{2}{3} + 3 + c = 4 \Rightarrow c = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{5}{3}$$

18.

$$H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(I) \quad H(-3) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 1,5$$

$$(II) \quad H''(-3) = 0$$

$$H'(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$H''(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 6ax + 2b$$

$$\Rightarrow -18a + 2b = 1$$

$$(III) \quad h(x) = H'(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

G_h ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn nur ungerade Exponenten auftreten

$$\Rightarrow a = 0 \quad c = 0$$

$$(II) \Rightarrow -1 + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$(I) \Rightarrow 9 \cdot \frac{1}{2} + d = 1,5 \Rightarrow d = -3$$

$$\Rightarrow H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$$

19.1 Falls die Parabel nach oben geöffnet sein sollte, dann kann die Steigung bei $x = 2$ nicht negativ sein und falls die Parabel nach unten geöffnet sein sollte, dann kann der Schnittpunkt mit der y -Achse nicht bei 2 liegen. Das heißt, dass die Funktion f nicht vom Grad 2 sein kann.

19.2

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(I) \quad f(0) = 2 \Rightarrow d = 2$$

$$(II) \quad f(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c + d = 0$$

$$(III) \quad f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$(IV) \quad f'(2) = -9 \Rightarrow 12a + 4b + c = -9$$

$$(II) + (III) \Rightarrow 2a - b = -2 \quad (II) + (IV) \Rightarrow 11a + 5b = -11$$

$$(V) \Rightarrow b = 2a + 2$$

$$(IV) \Rightarrow 11a + 5(2a + 2) = -11 \Rightarrow 11a + 10a + 10 = -11 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow b = 2(-1) + 2 = 0$$

$$(II) \Rightarrow 1 - c + 2 = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x + 2$$

19.3

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

$$-3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

Skizze von f' :

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ TIP} \quad x_2 = 1 \text{ HOP} \Rightarrow \text{HOP}(1/4)$$

$\Rightarrow g(x) = 4$ ist Tangente an den Graphen G_f im HOP;

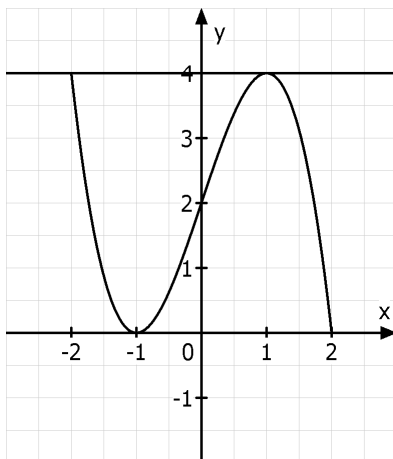
$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^3 + 3x + 2 = 4 \Rightarrow -x^3 + 3x - 2 = 0 \quad x_1 = 0$$

$$(-x^3 + 3x - 2) : (x - 1) = -x^2 - x + 2$$

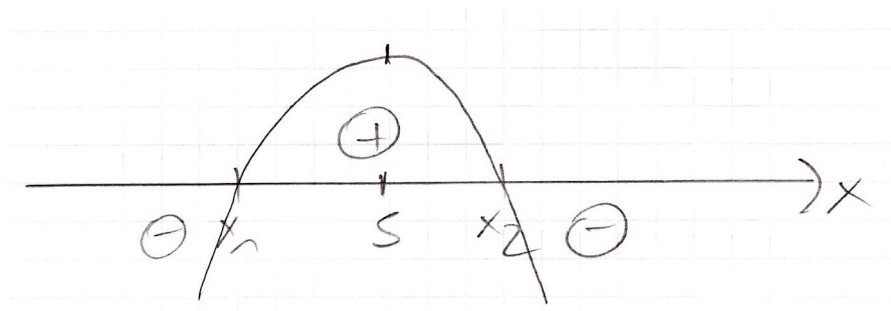
$$-x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 \quad x_3 = -2$$

$$\Rightarrow \text{SP}(-2/4)$$

19.4



20.1



$$G_{g'} \text{ sms in }]-\infty; 5] \quad G_{g'} \text{ smf in } [5; \infty[$$

20.2.1

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(I) \quad g(6) = 0 \Rightarrow 216a + 36b + 6c + d = 0$$

$$(II) \quad g(5) = -18 \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = -18$$

$$(III) \quad g'(6) = 16$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\Rightarrow 108a + 12b + c = 16$$

$$(IV) \quad g''(5) = 0$$

$$g''(x) = 6ax + 2b$$

$$\Rightarrow 30a + 2b = 0$$

20.2.2

$$(I) - (II) \quad 91a + 11b + c = 18 \quad (V)$$

$$(III) - (V) \quad 17a + b = -2 \quad (VI)$$

$$-2 \cdot (VI) + (IV) \quad -4a = 4 \Rightarrow a = -1$$

$$(VI) \Rightarrow -17 + b = -2 \Rightarrow b = 15$$

$$(III) \Rightarrow -108 + 180 + c = 16 \Rightarrow c = -56$$

$$(I) \Rightarrow -216 + 540 - 336 + d = 0 \Rightarrow d = 12$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^3 + 15x^2 - 56x + 12$$

21a)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$(I) \quad f(-1) = 4 \Rightarrow a - b + c = 4$$

$$(II) \quad f(3) = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$$

$$(III) \quad f'(3) = 2 \Rightarrow 6a + b = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 0,75x^2 - 2,5x + 0,75$$

21b)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(I) \quad f(0) = -1 \Rightarrow d = -1$$

$$(II) \quad f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(III) \quad f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$$

$$(IV) \quad f'(1) = 4,5 \Rightarrow 3a + 2b + c = 4,5$$

$$\Rightarrow f(x) = 0,5x^3 + 1,5x^2 - 1$$

21c)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$(I) f(0) = 0 \Rightarrow e = 0$$

$$(II) f'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

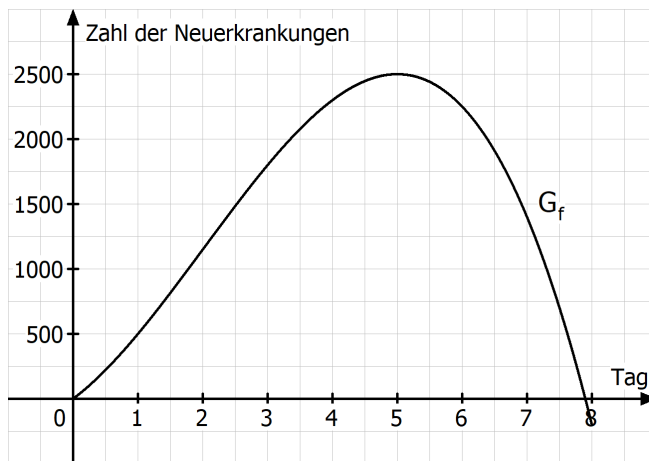
$$(III) f''(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(IV) f(3) = 3 \Rightarrow 81a + 27b + 9c + 3d + e = 3$$

$$(V) f''(3) = 0 \Rightarrow 108a + 18b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{9}x^3$$

22.1/22.3



22.2

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$(I) f(1) = 500 \Rightarrow a + b + c + d = 500$$

$$(II) f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$(III) f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0$$

$$(IV) f'(5) = 0 \Rightarrow 75a + 10b + c = 0$$

$$(IV) - (I): 74a + 9b = -500 \quad (V)$$

$$(III) \Rightarrow b = -6a$$

$$(V) \Rightarrow 74a + 9 \cdot (-6a) = -500 \Rightarrow 20a = -500 \Rightarrow a = -25$$

$$\Rightarrow b = -6 \cdot (-25) = 150$$

$$(I) \Rightarrow -25 + 150 + c = 500 \Rightarrow c = 375$$

$$\Rightarrow f(x) = -25x^3 + 150x^2 + 375x$$

22.3

$$f(x) = -25x^3 + 150x^2 + 375x \quad f'(x) = -75x^2 + 300x + 375 \quad f''(x) = -150x + 300$$

$$f(1) = 500 \quad \text{am 1. Tag 500 Neuerkrankungen}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{am Tag zuvor keine Krankmeldung}$$

$$f''(2) = 0 \quad f'' \text{ wechselt das Vorzeichen von + nach -}$$

$\Rightarrow$ am 2. Tag größter Anstieg der Neuerkrankungen

$$f'(5) = 0 \quad f' \text{ wechselt das Vorzeichen von + nach -}$$

$\Rightarrow$ am 5. Tag gibt es die meisten Neuerkrankungen

22.4

$$f(5) = 2500$$

Die Höchstzahl der Neuerkrankungen an einem Tag betrug 2500.

22.5

$$f'(2) = 675$$

Die maximale Zunahme der Neuerkrankungen an einem Tag betrug 675 pro Tag.

22.6

$$f(x) = 0 \Rightarrow -25x \cdot (x^2 - 6x - 15) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 15 = 0 \Rightarrow \left(x_2 = 3 - \sqrt{24} \approx -1,90 \right) \notin D_f \quad x_3 = 3 + \sqrt{24} \approx 7,90$$

Vom 8. Tag an war nicht mehr mit Neuerkrankungen zu rechnen.

23

$$G(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(I) \quad G(3) = 0 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 0$$

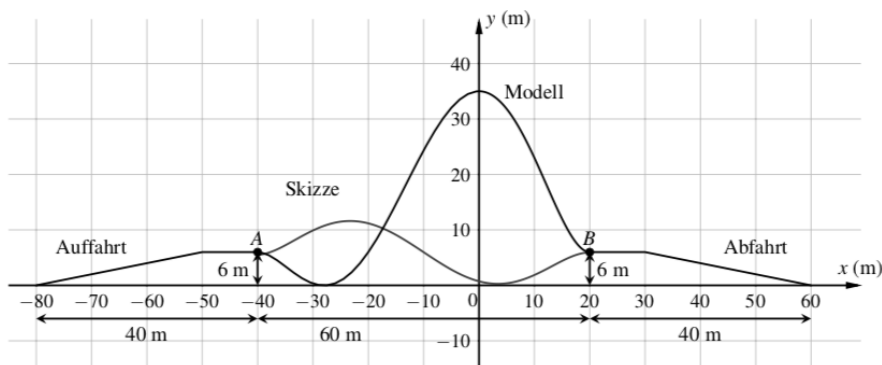
$$(II) \quad G(12) = 0 \Rightarrow 1728a + 144b + 12c + d = 0$$

$$(III) \quad G'(8) = 0 \Rightarrow 192a + 16b + c = 0$$

$$(IV) \quad G(8) = 400 \Rightarrow 512a + 64b + 8c + d = 400$$

$$\Rightarrow G(x) = -x^3 + 3x^2 + 144x - 432$$

24.1



24.2

(I) $f(-40) = 6$

(II) $f'(-40) = 0$

(III) $f(0) = 35$

(IV) $f'(0) = 0$

(V) $f(20) = 6$

(VI) $f'(20) = 0$

Mit einem CAS erhält man $f(x) = \frac{29}{12800000}x^5 + \frac{87}{640000}x^4 - \frac{29}{32000}x^3 - \frac{203}{1600}x^2 + 35$

25.1

$$w(t) = at^4 + bt^3 + c$$

(I) $w(0) = 200 \Rightarrow c = 200$

(II) $w(30) = 308 \Rightarrow 810000a + 27000b + c = 308$

(III) $w'(24) = 0 \quad w'(t) = 4at^3 + 3bt^2$
 $\Rightarrow 55296a + 1728b = 0$

(II) $810000a + 27000b = 108$

(III) $55296a + 1728b = 0 \Rightarrow b = -32a$

(II) $\Rightarrow 810000a - 864000a = 108 \Rightarrow a = -\frac{1}{500}$

$$\Rightarrow b = -32 \cdot \left(-\frac{1}{500}\right) = \frac{8}{125}$$

$$\Rightarrow w(t) = -\frac{1}{500}t^4 + \frac{8}{125}t^3 + 200$$

25.2 $w(24) = 421 \text{ cm}$

25.3

$$w'(t) = -\frac{4}{500}t^3 + \frac{24}{125}t^2 \quad w''(t) = -\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t$$

$$-\frac{12}{500}t^2 + \frac{48}{125}t = 0 \Rightarrow t \cdot \left(-\frac{12}{500}t + \frac{48}{125} \right) \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = 16$$

Skizze von w'' :

$\Rightarrow t = 16$ Maximum von w'

Da w' im Bereich $[0;30]$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ absolutes Maximum für $t = 16$
 $\Rightarrow$ am 17. März 2010 war die Änderungsgeschwindigkeit des Pegelstandes am größten.

26.1 G_f hat eine Nullstelle bei 0 und bei $x = 0$ eine Steigung von 0. G_f hat bei $x = -3$ einen Funktionswert von -3 und bei $x = -3$ eine Steigung von -1.

26.2

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$(I) \quad f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$(II) \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(III) \quad f(-3) = -3 \Rightarrow -27a + 9b = -3$$

$$(IV) \quad f'(-3) = -1 \Rightarrow 27a - 6b = -1$$

$$(III) + (IV) \Rightarrow 3b = -4 \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

$$(IV) \Rightarrow 27a + 8 = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$$

27.1

$$\begin{aligned} N_1(1|0) \quad N_2(4|0) &\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-1)^2 \cdot (x-4)^2 \\ S_y(0|-2) &\Rightarrow -2 = a \cdot (-1)^2 \cdot (-4)^2 \Rightarrow -2 = 16a \Rightarrow a = -\frac{1}{8} \\ &\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x-1)^2 \cdot (x-4)^2 \\ f(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 8x + 16) = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 2x^3 + 16x^2 - 32x + x^2 - 8x + 16) = \\ &= -\frac{1}{8} \cdot (x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16) \end{aligned}$$

27.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (4x^3 - 30x^2 + 66x - 40) \\ f''(x) &= -\frac{1}{8} \cdot (12x^2 - 60x + 66) \\ -\frac{1}{8} \cdot (12x^2 - 60x + 66) &= 0 \Rightarrow 12x^2 - 60x + 66 \Rightarrow x_1 \approx 3,37 \quad x_2 \approx 1,63 \\ \text{Skizze von } f'' : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x_1 = 3,37 \text{ Maximum von } f' \quad x_2 = 1,63 \text{ Minimum von } f' \\ f'(1) &= 0 \quad f'(4) = 0 \quad f'(3,37) = 0,65 \quad f'(1,63) = -0,65 \\ &\Rightarrow G_f \text{ hat die größte Steigung bei } x = 3,37 \text{ und das größte Gefälle bei } x = 1,63. \end{aligned}$$

28

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \\ \text{(I)} \quad f(-1) &= 0,5 \Rightarrow -a + b - c + d = 0,5 \\ \text{(II)} \quad f''(0) &= 0 \Rightarrow b = 0 \\ \text{(III)} \quad f(0) &= 0 \Rightarrow d = 0 \\ \text{(IV)} \quad f'(0) &= 2 \Rightarrow c = 2 \\ \text{(I)} &\Rightarrow -a + 0 - 2 + 1 = 0,5 \Rightarrow a = -1,5 \\ &\Rightarrow f(x) = -1,5x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

29

$$k(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$k'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$k''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$(I) \quad k'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 12b + 4c + d = 0$$

$$(II) \quad k'(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$(III) \quad k''(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(IV) \quad k'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 3b + 2c + d = 1$$

$$(I) \quad 32a + 12b = 0$$

$$(II) \quad 4a + 3b = 1$$

$$8 \cdot (II) - (I) \quad 12b = 8 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$(II) \Rightarrow 4a + 2 = 1 \Rightarrow a = -0,25$$

$$\Rightarrow k'(x) = -x^3 + 2x^2$$

30

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad t(x) = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$(I) \quad g(0) = t(0) \Rightarrow g(0) = 4 \Rightarrow d = 4$$

$$(II) \quad g'(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$(III) \quad g'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$(IV) \quad g'(5) = 0 \Rightarrow 75a + 10b + c = 0$$

$$(I) \quad 3a - 2b = 0,5$$

$$(II) \quad 75a + 10b = 0,5$$

$$5 \cdot (I) - (II) : 90a = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{30}$$

$$(I) \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{30} - 2b = 0,5 \Rightarrow b = -0,2$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{30}x^3 - 0,2x^2 - 0,5x + 4$$

31

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(I) f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(II) f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{16}{3}a + \frac{8}{3}b + c = 0$$

$$(III) f(0) = 3 \Rightarrow d = 3$$

$$(IV) f(1) = 2 \Rightarrow a + b + c + d = 2$$

$$(I) \frac{16}{3}a + \frac{8}{3}b = 0$$

$$(II) a + b = -1 \Rightarrow a = -1 - b$$

$$(I) \Rightarrow \frac{16}{3} \cdot (-1 - b) + \frac{8}{3}b = 0 \Rightarrow -\frac{16}{3} - \frac{16}{3}b + \frac{8}{3}b = 0 \Rightarrow -\frac{8}{3}b = \frac{16}{3} \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow a = -1 - (-2) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

32

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 0,9x + c \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 0,9$$

$$(I) f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$(II) f(2) = 1,2 \Rightarrow 8a + 4b - 1,8 + c = 1,2 \Rightarrow 8a + 4b = 1$$

$$(III) f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b - 0,9 = 0 \Rightarrow 12a + 4b = 0,9$$

$$(III) - (II): 4a = -0,1 \Rightarrow a = -0,025$$

$$(II) \Rightarrow 8 \cdot (-0,025) + 4b = 1 \Rightarrow 4b = 1,2 \Rightarrow b = 0,3$$

33

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 3x^2 + 6ax + 2b$$

$$(I) f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$(II) f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(III) f''(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$(IV) f'(3) = 0 \Rightarrow 3^3 + 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c = 0$$

$$\Rightarrow 27 + 27a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$$

34

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x-6)^2$$

$$P(1|-5) \Rightarrow -5 = a \cdot 1 \cdot (1-6)^2 \Rightarrow -5 = 25a \Rightarrow a = -0,2$$

$$\Rightarrow f(x) = -0,2 \cdot x \cdot (x-6)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = -0,2x(x^2 - 12x + 36) \Rightarrow f(x) = -0,2x^3 + 2,4x^2 - 7,2x$$